CAPÍTULO 3

Geometría Euclidiana y Geometrías no Euclidianas

"… Ese perfeccionismo de formas que encontramos en el genio que nos dio el Partenón, alcanza su mayor expresión en los Elementos de Euclides". Ivor Thomas.

3.0 Introducción

Tradicionalmente la geometría la hemos asociado al concepto de espacio físico, donde entidades como puntos, rectas y formas tienen su hábitat, y entre las cuales aparecen definidas relaciones de diverso tipo. Sin embargo, después de haber evolucionado por alrededor de cinco mil años, la concepción geométrica ha cubierto amplios espacios que lindan con el análisis matemático, con la topología y el álgebra. En la vastedad de estos linderos se desarrolla, entre otras, la geometría proyectiva, la geometría diferencial, la geometría algebraica, la geometría métrica y la geometría euclidiana con sus variantes no euclidianas.

En la evolución de la geometría hay que resaltar las contribuciones de antiguas culturas, como la babilonia y la egipcia, principalmente. En las diferentes etapas de su desarrollo, estas culturas dejaron textos, de cuya interpretación se desprende que cultivaron la geometría, sobre todo en el ámbito de sus aplicaciones prácticas. Las evidencias mostradas en las obras de Sachs y Neugebauer[1] por un lado y la interpretación de papiros, como los de Moscú y de Berlín, por otro, confirman que la geometría era de uso corriente en esas culturas[2]. Las aplicaciones desde luego van dirigidas a la práctica de la agrimensura y de la construcción. La agrimensura tiene como objeto la medición de terrenos o el cálculo de áreas de superficies limitadas de la tierra. La asociación de triplas pitagóricas con lados de un triángulo rectángulo, permite construir escuadras para uso en la construcción de edificios y templos. Los orígenes de la geometría, al menos en los dos aspectos descritos, los atribuye el historiador griego Heródoto (siglo V AC) a los egipcios de la dinastía de los Sesostris (III milenio AC), razón por la cual viene el nombre de *geometría*, que según su etimología, se deriva de las raíces griegas *geo* (tierra) y *metron* (medida).

La cultura mesopotámica, comúnmente relacionada con ciudades como Ur (la patria chica del personaje bíblico Abraham), Babilonia (la ciudad del rey Hammurabi) y Nínive (antigua capital de Asiria), dejó mucha información geométrica codificada en tablillas de cerámica, a través de escritura cuneiforme, relacionada en particular con el cálculo de áreas de figuras planas, como triángulos, cuadrados, rectángulos, trapezoides y volúmenes de sólidos como paralelepípedos y pirámides. Por esta época se aproximó la longitud de la circunferencia, a un valor de tres veces la longitud del diámetro, lo que da para el número π, un valor de tres. Este valor pasó a formar parte de las "matemáticas" de la Biblia[3], como lo es también el llamado "número de la bestia", el entero, ***666***.

La característica central de la geometría griega, fue su carácter axiomático-deductivo[4], donde las proposiciones geométricas están acompañadas de su correspondiente demostración, dejando en segundo plano la evidencia empírica de las mismas. De acuerdo a una de las primeras obras

---

[1] NEUGEBAUER, O. et al. *Mathematical Cuneiform Texts.* American Oriental Series. New Haven. 1945.

[2] Vease por ejemplo: van der WAERDEN. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1983. Aquí se describe a partir de la página 26, varias contribuciones de las culturas china, babilonia e hindú.

[3] Visitar: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/cronica%20IV.PDF

[4] Ver: Tarski, A. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* Dover Publications, Inc. New York. 1995, página 120 y siguientes.

históricas sobre las matemáticas conocida como el *Sumario de Eudemo*[5], la geometría griega, se inicia con Tales de Mileto, uno de los siete sabios de la antigua Grecia y continúa con Pitágoras quien busca aplicar su filosofía a la aritmetización de la geometría. Además de los teoremas que se atribuyen a Pitágoras, hay que reconocer que su escuela, que duró alrededor de tres siglos, contribuyó considerablemente a la geometría, en particular al algebra geométrica. En conexión con esto, bien vale la pena leer las notas sobre estos tópicos en *Temas de la Historia de las Matemáticas*[6].

3.1 Los Elementos de Euclides.

Algunos apartes de esta exposición se han tomado de la obra divulgativa de William Dunham[7], muy popular en los años noventas del siglo pasado, donde se expone de manera amena y clara todo un alfabeto de temas relativos a las matemáticas elementales.

Euclides, quien vivió alrededor del siglo III AC, fue según la tradición, profesor de la Universidad de Alejandría e iniciador de toda una escuela matemática que perduraría por muchos siglos. Algunos de los más brillantes exponentes serían: Diofanto, Eratóstenes, Hypatia, Tolomeo, Conon, Pappo y Theon[8]. El libro *Los Elementos* es la obra mayor de Euclides y el libro más publicado de matemáticas en toda la historia. La más reciente edición apareció en 2002 corresponde a la reedición de la traducción hecha por Thomas L. Head y editada por Dana Densmore[9]. La obra consta de trece libros con 465 proposiciones que incluyen tópicos de geometría plana y sólida y temas relacionados con teoría de números. Allí aparece compilada la mayor parte del conocimiento matemático, hasta la época en que vivió Euclides, exceptuando el estudio de las curvas, llamadas cónicas, hecho un siglo después, por Apolonio de Perga (262-190 AC) y las aplicaciones de las matemáticas a otras áreas, entre ellas, a la ingeniería.

Como abreboca al estudio y análisis epistemológico de la geometría presentaremos aquí algunos elementos básicos, de los cuales parte la geometría de Euclides. Un antiguo proverbio chino dice, “una jornada de mil millas comienza con un paso”, y así empieza los *Elementos* una larga jornada, comenzando con nociones y postulados simples, hasta lograr ascender a consecuencias bastante complejas. Entre las cosas que hacen importante la obra, está, el enfoque lógico de su desarrollo. Las primeras 23 definiciones y sus cinco postulados iniciales forman el núcleo básico de los *Elementos*. A partir de allí se enunciarán los teoremas o proposiciones, cuyas demostraciones son ejemplo del uso atinado de la lógica. Entre estos primeros elementos básicos, digamos, nociones primitivas y postulados, destaquemos los siguientes:

NOCIONES PRIMITIVAS

A1. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si.

A2. Si se suman cosas iguales a cosas iguales el todo sigue siendo igual.

A3. Si se resta de cosas iguales, cosas iguales, lo que queda sigue siendo igual.

A4. Cosas que coinciden en cada una de sus partes, son iguales entre si.

---

[5] Eudemo fue compañero y colega de Aristóteles y escribió varios obras históricas sobre aritmética, geometría y astronomía, sin embargo, sólo tenemos referencias de ellas, principalmente a través de la obra de Proclo (Siglo V AD).

[6] PAREJA-HEREDIA D. *Citado en Edelma 6* (Exposición 6 de estas notas de clase sobre Epistemología). Ver especialmente la sección 1.9

[7] DUNHAM, W. *The Mathematical Universe*. John Wiley & Sons. New York. 1994.

[8] A quien debemos la revisión y consecuente edición de las *Elementos*, setecientos años después de escritos, edición que ha servido de base, para las posteriores ediciones y traducciones de esta clásica obra de las matemáticas.

[9] *Euclid’s Elements.* Tr. T. L. Head. Ed. Dana Densmore. Green Lyon Press. 2002

A5. El todo es mayor que cada una de sus partes.

POSTULADOS

P1. Es posible trazar un segmento entre dos puntos dados.

P2. Es posible prolongar un segmento, tanto como se quiera.

P3. Es posible construir una circunferencia si se dan, el centro y el radio de la misma.

P4. Todos los ángulos rectos son iguales entre si.

P5. Si una recta intercepta a dos rectas de modo que los ángulos interiores a un lado de ella suman menos que dos ángulos rectos, estas dos rectas se interceptarán, si se prolongan lo suficiente, hacia el lado en que la suma de sus ángulos interiores es menor que dos rectos.

P5 es equivalente a:

P´5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar, una segunda recta paralela a la primera, y solo una.

Los primeros dos postulados simplemente legitiman el uso de la regla no marcada. La regla en la geometría euclidiana tiene un solo propósito: trazar segmentos y prolongar los mismos a lo largo de una recta. A la regla no le está permitido transportar longitudes, es decir, no sirve para medir. El tercer postulado garantiza la construcción de circunferencias, dado el centro y el radio, y al igual que la regla, el compás, tampoco es medio lícito para transportas longitudes. Aun más, el compás se entiende como un instrumento colapsable, que se usa para construir una sola circunferencia, dado el centro y su radio y luego se desecha. No es el compás moderno, graduable que tiene varios usos, entre ellos dibujar circunferencias de radio variado y transportar distancias.

Con esas pocas herramientas, Euclides se lanza a explorar el amplio terreno de la geometría, empezando por resultados aparentemente simples, pero que la prueba de los mismos exige cierta maestría. Un ejemplo es la construcción de un segmento, sobre una recta, de la misma longitud de otro segmento dado. Como dijimos, ni el compás ni la regla pueden usarse para transportar distancias (de otra forma no habría problema). Estos instrumentos únicamente están habilitados para trazar segmentos, o para construir circunferencias o arcos de las mismas, con centro y radios determinados.

DEFINICIONES. Entre las definiciones, destaquemos las siguientes:

D1 – Un *punto* es aquello que no tiene partes.

D2 – Una recta es *longitud* sin anchura.

D3 – Los *extremos* de un segmento (un trozo de recta) son puntos.

D4 – Una *superficie* es aquello que tiene sólo *longitud* y *anchura*.

D5 – Los *extremos* de una superficie son rectas o segmentos de rectas.

D6 – Un sólido es aquello que tiene *longitud*, a*nchura* y *profundidad.*

D7 - Un *extremo* de un sólido es una *superficie.*

Euclides usa la palabra *línea*, en lugar de recta, pues el sentido de la geometría de Euclides es trabajar con *líneas* y *puntos,* como elementos básicos. Las únicas líneas distintas a las rectas, usadas por la geometría de Euclides, son las circunferencias y los arcos de éstas. Recurrimos aquí al término línea, para permitir la inclusión de otras figuras geométricas como círculos, elipses planares, y combinaciones de éstas, como ejemplos de superficies, donde los extremos son, respectivamente, la circunferencia, la elipse o combinaciones de estas.

Obsérvese cómo Euclides, lleva al lector, a captar la idea de punto basándose en la idea intuitiva de no tener partes, como en la concepción atómica de Demócrito, para quien el átomo es la parte indivisible elemental, constitutiva de todo ser. En la geometría de Euclides va ocurrir otro tanto. Los puntos serán los elementos constitutivos de todos los entes geométricos. El término *extremo* usado aquí, equivale al término *frontera* de las matemáticas actuales, que aparece en análisis y topología. Hablando de topología, para el caso de la topología algebraica hay un principio básico que afirma que *la frontera de la frontera es el vacío.* Así Euclides estuvo cerca de enunciar este principio que, en álgebra homológica se simboliza como: $\partial^2 = \phi$.[10]

La primera proposición de Euclides, nos permite chequear la eficiencia de las herramientas euclidianas.

Proposición 1. *Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado AB.*

Prueba. Se empieza construyendo una circunferencia con centro en A y radio AB (*fig.*3.2.1). Esto lo permite el postulado **P3.** Igual construcción se hace tomando como centro el punto B y radio BA. La intersección de las dos circunferencias determina el punto C. Este punto, junto a los extremos del segmento AB forma el triángulo ABC que cumple con los requerimientos de ser equilátero y de tener el segmento AB como uno de sus lados. Los segmentos AC y BC tienen la misma longitud que AB por el Axioma **A1**, en el que se afirma: dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si. Por construcción los radios de las circunferencias trazadas coinciden con el segmento AB.

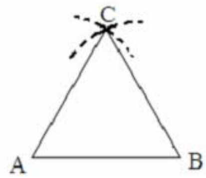

Fig. 3.2.1. Procedimiento dado por Euclides para la construcción de un triángulo equilátero dado el lado AB.

La transferencia de distancias o longitudes, no la incluye Euclides como axioma porque esto puede hacerse con el compás, aunque no en el sentido de tomar el radio de la circunferencia como unidad de medida. Una muestra de ello es la proposición en la que se muestra como transferir una longitud usando compás colapsable. Se entiende por compás colapsable, aquel compás imaginario que se autodestruye después de trazar una circunferencia, dado el centro y el radio de la misma. Para ampliar el conocimiento sobre construcciones con regla y compás puede verse mis notas de historia de las matemáticas (pág. 99 y sgts.).

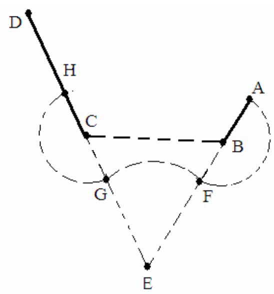

Fig. 3.2.2. La proposición 2, garantiza que un segmento AB puede transferirse sobre un segmento CD.

[10] Estas observaciones se han tomado del interesante artículo:
MANIN, Y. *The notion of dimension in geometry and algebra.* Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 43. No. 2. April 2006.

Proposición 2. *Trasladar un segmento AB de longitud dada, sobre otro segmento CD.*

Prueba. Supongamos que se quiere trasladar el segmento AB sobre el segmento CD (*Fig.*3.2.2). Por **P1**, se puede construir un segmento de recta que una los puntos B y C. Por la proposición 1 podemos construir sobre este segmento el triángulo equilátero BEC. Haciendo centro en B trazamos una circunferencia con radio AB que toca el segmento BE en F. Con centro en E y radio EF construimos una circunferencia que intercepta el segmento DE en G. Con centro en C y radio CG trazamos una última circunferencia que encuentra al segmento CD en H. Todas estas construcciones están permitidas por **P3**. Una cadena de igualdades muestra que el segmento CH tiene la misma longitud que el segmento AB. Con esto damos la posibilidad de transportar un segmento de un lugar a otro usando herramientas euclidianas.

Aquí $\underline{XY}$ significa la longitud del segmento XY. Por las construcciones hechas tenemos:

$\underline{AB} = \underline{BF}$ $\longrightarrow$ por ser radios de la misma circunferencia

$= \underline{BE} - \underline{EF}$

$= \underline{BE} - \underline{EG}$ porque EF y EG son radios de la misma circunferencia

$= \underline{CE} - \underline{EG}$ por ser BE y CE lados de un triángulo equilátero

$= \underline{CG}$

$= \underline{CH}$ de nuevo por ser radios de la misma circunferencia.

Juntando, cabeza y cola (*Capicúa*, como se diría en catalán), $\underline{AB} = \underline{CH}$. Lo que muestra que el segmento de longitud de $\underline{AB}$ se trasladó a CD.

Esta construcción, aunque se hace con compás, no requiere que éste transporte distancias. La consecuencia, sin embargo, es que el procedimiento de transportar distancias con el compás queda legitimado y, para efectos prácticos, uno sí usa el compás con ese propósito. Hay que recordar, no obstante, que Euclides propone un sistema deductivo estricto en el cual los axiomas no deben ser redundantes en el sentido de que uno de ellos, pueda deducirse de los otros. Es por esto que Euclides no toma como axioma la posibilidad de transportar segmentos usando el compás.

El desarrollo sistemático de los temas tratados en los Elementos, tiene el toque de elegancia y belleza que caracterizó a la cultura griega. Esta belleza y elegancia se pone de relieve en obras arquitectónicas, como el Partenón, en esculturas como la Venus de Milo o la Victoria de Samotracia, o en obras clásicas como La Ilíada de Homero, o en las tragedias escritas por Sófocles y Esquilo, y aún en los trabajos filosóficos de Platón y Aristóteles.

Después de tratar las construcciones con regla y compás elementales, Euclides entra a probar algunas proposiciones relativas a congruencia de triángulos, tipo lado-ángulo-lado, lado-lado-lado y ángulo-lado-ángulo. La proposición 5 del libro I, demuestra que los ángulos basales de un triángulo isósceles son congruentes. Aunque el teorema se atribuye a Tales, la demostración sin lugar a dudas, está diseñada dentro del estilo peculiar de Euclides. Esta proposición tiene una historia interesante desde la edad media, en razón a que la demostración recurre a una gráfica, a la que se le encontraba parecido a un puente. A este teorema se le asoció el apodo de *pons asinorum* (puente de los burros) para significar que los incapaces de aprender geometría (los burros) no llegaban si no hasta este punto, sin lograr cruzar el puente, que conduce a la geometría.

Después de cruzar el pons asinorum uno aprende, entre otras muchas cosas, a bisecar ángulos y a levantar perpendiculares con la ayuda de la regla y el compás. Un resultado muy interesante y que tendrá repercusiones en varias partes de las matemáticas es la proposición 20, de la que se desprende la llamada *desigualdad del triángulo*, que aun, para espacios abstractos, como los de

Banach y Hilbert se enuncia: $|A+B| \le |A| + |B|$, donde *A* y *B*, son elementos arbitrarios del espacio y las barras verticales indican la norma o *longitud* de los elementos involucrados.

Proposición 20. *En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.*

En relación con esta proposición, el comentador Proclo (410-485)[11] escribe…

"Los epicureanos tienden a ridiculizar este teorema, diciendo que es trivial, aun para los burros, y que la demostración es innecesaria. Es una muestra de la ignorancia de un individuo, afirman, exigir que se les demuestre, verdad tan evidente…. Hasta un burro situado en un vértice, sabe que, si le colocan la hierba en una esquina de un triángulo, no necesita ir a buscarla siguiendo dos lados, si no por la vía más corta, que es el tercer lado".

¿Por que demostrar un teorema tan obvio? Continúa preguntándose Proclo, y su respuesta es:

> "…para la percepción es evidente, pero no lo es para el pensamiento científico. Muchas cosas tienen este carácter, por ejemplo, sabemos que el fuego quema, pero es un reto para la ciencia saber, por qué y cómo es que el fuego quema".

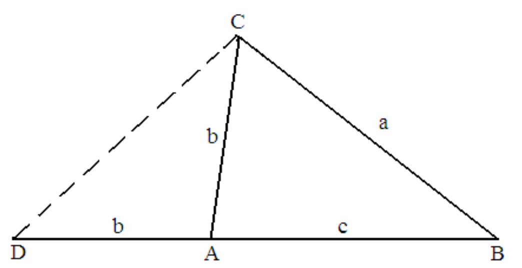

Fig. 3.2.3. La prueba de la desigualdad del triángulo. La suma de las longitudes *b* y *c* es mayor que *a*.

Prueba. Consideremos el triángulo ABC con lados de longitudes *a, b, c*. Queremos probar que la suma de las longitudes de dos lados, digamos, $b + c$ es mayor que *a*.

En la figura 3.2.3, extendemos el lado BA hasta D de tal forma que $\underline{AD} = \underline{AC} = b$. De aquí se sigue que $\underline{BD} = b + c$. Esta construcción da origen al triángulo DAC, el cual es isósceles por tener dos lados de longitud *b*. Consideremos ahora el triángulo mayor BDC. Denotamos *ang*XYZ, para significar el ángulo cuyo vértice es Y y sus lados adyacentes YX y YZ.

*ang*BCD > *ang*ACD	Porque el todo es mayor que una de sus partes
= *ang*BDC	Por ser ángulos basales del triángulo isósceles DAC

Así, *ang*BCD es mayor que *ang*BDC. Como Euclides previamente había demostrado que a mayor ángulo se anteponía mayor lado, se sigue que $\underline{BD} > \underline{BC}$, dicho en otros términos $b + c > a$, como se quería probar.

Las consideraciones expuesta por Proclo me recuerdan un problema de cálculo en el cual se pregunta por la forma más rápida de llegar, de un punto A, en la orilla de un río, hasta una boya C, en la corriente del río, utilizando solamente trayectorias rectilíneas, como muestra la *Fig*.3.2.4, sabiendo que, la velocidad en el agua es diferente a la velocidad a lo largo de la orilla. ¡Un ejercicio para la clase de cálculo!

[11] Proclo escribió sobre los *Elementos*, basándose en escritos de contemporáneos de Euclides, como Eudemo, discípulo de Aristóteles, que escribió una obra, hoy desaparecida, conocida como el *Sumario de Eudemo*.

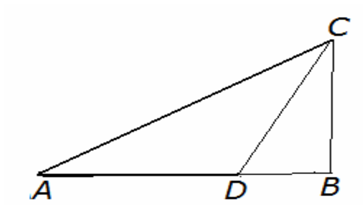

Fig. 3.2.4. Para ir de A hasta C, el camino más rápido, no es necesariamente el segmento rectilíneo AC, cuando parte del trayecto hay que hacerlo a nado. Corriendo y nadando habría que seguir una trayectoria, iniciando con AD y siguiendo luego por BC.

Carátula de la primera edición inglesa de *Los Elementos* de Euclides publicada en 1570 por Sir Henry Billingsley. La edición editada por Thomas L. Heath publicada a principios del siglo pasado aun se encuentra en el mercado, publicada por Editorial Dover de Nueva York. Foto tomada de Wikipedia en: http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_Elements .

Siguiente sección: *Axiomática en los Elementos y Geometrías no Euclidianas*